一类高阶非线性微分方程 Lyapunov 不等式

郭　旭[1]，王浩帆[1]，郑　军[2]

（1．西南交通大学 信息科学与技术学院，成都 611756；2．西南交通大学 数学学院，成都 611756）

［摘　要］本文研究一类高阶非线性微分方程的 Lyapunov 不等式，是对《Lyapunov-type inequalities for ψ -Laplacian equations》有关结论的进一步探讨和推广.

［关键词］Lyapunov 不等式；高阶非线性微分方程；ψ -Laplacian

1　引　　言

Lyapunov 在文［1］考察了方程 $\begin{cases} u''(x)+r(x)u(x)=0,\ x\in(a,b) \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$，其中 r 为在 $[a,b]$ 上的非负连续函数，其证明了：若存在非平凡解 u，则不等式 $\int_a^b r(x)dx \ge \frac{4}{b-a}$ 成立. 由于该不等式在常微分方程解的振荡性、周期性、稳定性，以及特征值等问题的研究中有着重要作用(见[2, 14]等)，后人称上述不等式为 Lyapunov 不等式，且对其做了大量的推广和研究 (见[3-13, 15-18]). [18]考察了ψ -Laplacian 方程：

$$\left(\psi\left(u'(x)\right)\right)'+r(x)f\left(u(x)\right)=0,\ x\in(a,b), \tag{1a}$$

$$u(a)=u(b)=0, \tag{1b}$$

其中 $r\in L^1(a,b)$ 且在 (a,b) 上不恒等于零，ψ 和 f 满足如下基本条件：

（i）ψ 和 f 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数且在 $(0,\infty)$ 上一阶连续可微，f 为非零函数;

（ii）ψ 为 $\mathbb{R}$ 上奇函数;

（iii）对于 $\forall t\in[0,\infty)$ 都有 $f(t)\ge 0$；

（iv）$\exists k_0>0$，使得 $|f(t)|\le k_0\psi(|t|)$，$t\in(-\infty,\infty)$；

以及ψ 或 f 满足推广形式的 Lieberman 条件 (见[18])：

（v）假设 $\exists\delta_0,\delta_1\ge 0$，使得 $\delta_0\psi(t)\le t\psi'(t)\le\delta_1\psi(t)$，$\forall t>0$；

（vi）假设 $\exists\theta_0,\theta_1\ge 0$，使得 $\theta_0 f(t)\le tf'(t)\le\theta_1 f(t)$，$\forall t>0$.

若(1) 存在解 u，其满足在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上一阶连续可微，且 $\psi\left(u'(x)\right)$

在 x 定义域内连续，文［18］得到如下定理.

定理 1[18]（i） 若 ψ 满足 (i)-(iv)及(v)， 则

$$\int_a^b |r(x)|dx \ge \frac{2}{k_0}\cdot\frac{1+\delta_0}{1+\delta_1}\cdot\min\left\{\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\delta_0},\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\delta_1}\right\}.$$

（ii） 若 f 满足(i)-(iv)及(vi)， 则

$$\int_a^b |r(x)|dx \ge \frac{2}{k_0}\cdot\frac{1+\theta_0}{1+\theta_1}\cdot\min\left\{\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\theta_0},\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\theta_1}\right\}.$$

定理 2[18] 进一步假设 $\psi(t)t$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 上是凸函数.

（i）若 ψ 满足 (i)-(iv)及(v)，则

$$\int_a^b |r(x)|dx \ge \frac{2}{k_0}\cdot\min\left\{\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\delta_0},\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\delta_1}\right\}.$$

（ii）若 f 满足(i)-(iv)及(vi)，则

$$\int_a^b |r(x)|dx \ge \frac{2}{k_0}\cdot\min\left\{\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\theta_0},\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\theta_1}\right\}.$$

引理 3[18] 令 $\Psi(t)=\int_0^t \psi(s)ds$，$t\ge 0$，且若 ψ 满足（i）-（v）,则下列结论正确

（i） $\psi(st)\le \max\left\{s^{\delta_0},s^{\delta_1}\right\}\psi(t)$， $\forall s,t\ge 0$.

（ii） Ψ 是 $(0,+\infty)$ 上的二阶连续可微函数，且在 $[0,+\infty)$ 为凸函数.

（iii） $\dfrac{t\psi(t)}{1+\delta_1}\le\Psi(t)\le\dfrac{t\psi(t)}{1+\delta_0}$， $\forall t\ge 0$.

若令 $F(t)=\int_0^t f(s)ds$，$t\ge 0$，且 f 满足（i）-（iv）及（vi）,则有与上述相似的结论.

本文是在此基础上继续文［18]的工作，将上述定理 1、定理 2 推广到高阶情形.

2 主要结论

本文总假设：如下等式成立且其中 ψ 和 f 满足文［18］的（i）-（iv）条件

$$\left(\psi\left(u^{(m)}\right)\right)^{(n)}+r^{(k)}(x)f\left(u^{(q)}(x)\right)=0, \tag{2a}$$

$$u^{(l)}(a)=u^{(p)}(b)=0,\ l=0,1,2\cdots,n,\ p=0,1,2\cdots,m. \tag{2b}$$

其中 $m+n\ge 2$，$0\le q<m$，$0\le n\le m$.

定理 1 （i）若 Ψ 满足（v）则

$$\int_a^b\left|r^{(k)}(x)\right|dx\ge\frac{(1+\delta_0)n!}{k_0(1+\delta_1)(b-a)^n}\cdot\min\left\{\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\delta_0},\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\delta_1}\right\}.$$

（ii）若 f 满足（vi）则

$$\int_a^b\left|r^{(k)}(x)\right|dx\ge\frac{(1+\theta_0)n!}{k_0(1+\theta_1)(b-a)^n}\cdot\min\left\{\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\theta_0},\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\theta_1}\right\}.$$

定理 2 假设 $\psi(t)t$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 上是凸函数，

（i）若 ψ 满足（v）则

$$\int_a^b\left|r^{(k)}(x)\right|dx\ge\frac{n!}{k_0(b-a)^n}\cdot\min\left\{\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\delta_0},\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\delta_1}\right\}.$$

（ii）若 f 满足（vi）则

$$\int_a^b\left|r^{(k)}(x)\right|dx\ge\frac{n!}{k_0(b-a)^n}\cdot\min\left\{\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\theta_0},\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\theta_1}\right\}.$$

3 定理的证明

定理 1 的（i）证明

由含积分余项的 Taylor 公式

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{0!}+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x(t-x)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

以及方程 $u^{(l)}(a)=u^{(p)}(b)=0,\ l=0,1,2\cdots,n,\ p=0,1,2\cdots,m$，$0\le q<m$，$0\le n\le m$

可得

$$u^{(q)}(x)\le\frac{1}{(m-q)!}\int_a^b(b-x)^{m-q}u^{(m)}(x)dx, \tag{3}$$

$$u^{(m-n)}(x)\le\frac{1}{n!}\int_a^b(b-x)^n u^{(m)}(x)dx. \tag{4}$$

故由（3）（4）及文［18］中引理 3 的（i）（ii）和（iii）可得

$\psi\left(\left|u^{(q)}(x)\right|\right)\left|u^{(m-n)}(x)\right|$

$$
\leq \psi\left(\left|\frac{1}{(m-q)!}\int_a^b (b-x)^{m-q} u^{(m)}(x)dx\right|\right)\left|\frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n u^{(m)}(x)dx\right|
$$

$$
\leq \psi\left(\left|\frac{1}{(m-q)!}\max\left|(b-x)^{m-q}\right|\int_a^b u^{(m)}dx\right|\right)\left|\frac{1}{n!}\max\left|(b-x)^n\right|\left|\int_a^b u^{(m)}dx\right|\right|
$$

$$
=\psi\left(\frac{1}{(m-q)!}(b-a)^{m-q}\left|\int_a^b u^{(m)}dx\right|\right)\frac{1}{n!}(b-a)^n\left|\int_a^b u^{(m)}dx\right|
$$

$$
\leq \psi\left(\frac{(b-a)^{m-q+1}}{(m-q)!}\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|u^{(m)}\right|dx\right)\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|u^{(m)}\right|dx
$$

$$
\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\max\left\{\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_1}\right\}\psi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|u^{(m)}\right|dx\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|u^{(m)}\right|dx
$$

$$
\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\max\left\{\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_1}\right\}(1+\delta_1)\frac{1}{b-a}\int_a^b\Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx
$$

$$
=\frac{(b-a)^n(1+\delta_1)}{n!}\max\left\{\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_1}\right\}
$$

$$
\cdot\int_a^b\Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx. \tag{5}
$$

由文［18］的引理 3 的（iii）及条件（ii）可得

$$
\int_a^b\Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx\leq\frac{1}{1+\delta_0}\int_a^b\psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)\left|u^{(m)}\right|dx=\frac{1}{1+\delta_0}\int_a^b\psi\left(u^{(m)}\right)u^{(m)}dx. \tag{6}
$$

再由分部积分与 (2) 可得

$$
\frac{1}{1+\delta_0}\int_a^b\psi\left(u^{(m)}\right)u^{(m)}dx\leq\frac{1}{1+\delta_0}\int_a^b\left|u^{(m-n)}\left(\psi\left(u^{(m)}\right)\right)^{(n)}\right|dx
$$

$$
=\frac{1}{1+\delta_0}\int_a^b\left|r^{(k)}f\left(u^{(q)}\right)u^{(m-n)}\right|dx. \tag{7}
$$

由文［18］的条件（iv）和（5）得

$$
\frac{1}{1+\delta_0}\int_a^b\left|r^{(k)}f\left(u^{(q)}\right)u^{(m-n)}\right|dx\leq\frac{1}{1+\delta_0}\max\left(\left|f\left(u^{(q)}\right)u^{(m-n)}\right|\right)\int_a^b\left|r^{(k)}\right|dx
$$

$$
\leq\frac{k_0}{1+\delta_0}\max\left(\psi\left(\left|u^{(q)}\right|\right)\left|u^{(m-n)}\right|\right)\int_a^b\left|r^{(k)}\right|dx
$$

$$\le \frac{k_0(1+\delta_1)(b-a)^n}{(1+\delta_0)n!}$$

$$\cdot \max\left\{\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_0}, \left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_1}\right\}$$

$$\cdot\int_a^b \Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx\int_a^b\left|r^{(k)}\right|dx. \tag{8}$$

若 $\int_a^b \Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx=0$，则由文［18］的引理 3 及条件（ii）（v）可得 $\Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)=0$，则 $u^{(m)}=0$，可知 $u=A_m x^{m-1}+A_{m-1}x^{m-2}+\cdots+A_2x+A_1$，（$A_m, A_{m-1}\cdots, A_1$ 为常数)，但由边值条件 $u^{(p)}(b)=0,\ p=0,1,2\cdots,m$ 可求得 $A_m=A_{m-1}=\cdots=A_1=0$，与题设矛盾，故 $\int_a^b \Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx\ne 0$，可约去.

因此，由 (6) (7) (8) 得

$$\int_a^b\left|r^{(k)}(x)\right|dx \ge \frac{(1+\delta_0)n!}{k_0(1+\delta_1)(b-a)^n}\cdot\min\left\{\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\delta_0}, \left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\delta_1}\right\}.$$

定理 1 的（i）得证.

定理 1 的（ii）证明

与定理 1 的（i）证明方法相似，若 f 满足文 [1] 的条件（vi），可得到与 (5) 相似的结论

$$f\left(\left|u^{(q)}(x)\right|\right)\left|u^{(m-n)}(x)\right| \le \frac{(b-a)^n(1+\theta_1)}{n!}\max\left\{\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\theta_0}, \left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\theta_1}\right\}$$

$$\cdot\int_a^b F\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx. \tag{9}$$

再由分部积分、文［18］的引理 3，条件（ii）（iv）及 (2) (9) 可得

$$\int_a^b F\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx \le \frac{1}{1+\theta_0}\int_a^b f\left(\left|u^{(m)}\right|\right)\left|u^{(m)}\right|dx$$

$$\le \frac{k_0}{1+\theta_0}\int_a^b \psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)\left|u^{(m)}\right|dx$$

$$= \frac{k_0}{1+\theta_0}\int_a^b \psi\left(u^{(m)}\right)u^{(m)}dx$$

$$\le \frac{k_0}{1+\theta_0}\int_a^b \left|u^{(m-n)}\left(\psi\left(u^{(m)}\right)\right)^{(n)}\right|dx$$

$$=\frac{k_0}{1+\theta_0}\int_a^b \left|r^{(k)}f\left(u^{(q)}\right)u^{(m-n)}\right|dx$$

$$\le \frac{k_0}{1+\theta_0}\max\left(\left|f\left(u^{(q)}\right)u^{(m-n)}\right|\right)\int_a^b\left|r^{(k)}\right|dx$$

$$\le \frac{k_0\left(1+\theta_1\right)\left(b-a\right)^n}{\left(1+\theta_0\right)n!}\max\left\{\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\theta_0},\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\theta_1}\right\}\int_a^b F\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx\int_a^b\left|r^{(k)}\right|dx$$

与上述判别 $\int_a^b \Psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx \ne 0$ 的方法类似，可得 $\int_a^b F\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx \ne 0$，能约去.

因此，可得

$$\int_a^b\left|r^{(k)}(x)\right|dx \ge \frac{\left(1+\theta_0\right)n!}{k_0\left(1+\theta_1\right)\left(b-a\right)^n}\cdot\min\left\{\left(\frac{\left(m-q\right)!}{\left(b-a\right)^{m+1-q}}\right)^{\theta_0},\left(\frac{\left(m-q\right)!}{\left(b-a\right)^{m+1-q}}\right)^{\theta_1}\right\}.$$

定理 1 的（ii）得证.

定理 2 的（i）证明

令 $\Phi(t)=\psi(t)t$，$t\ge 0$. 由 (5) 可得

$$\psi\left(\left|u^{(q)}(x)\right|\right)\left|u^{(m-n)}(x)\right|\le\frac{\left(b-a\right)^{n+1}}{n!}\max\left\{\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_1}\right\}\psi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|u^{(m)}\right|dx\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|u^{(m)}\right|dx$$

$$=\frac{\left(b-a\right)^{n+1}}{n!}\max\left\{\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_1}\right\}\Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|u^{(m)}\right|dx\right)$$

$$\le\frac{\left(b-a\right)^{n+1}}{n!}\max\left\{\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_1}\right\}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b\Phi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx$$

$$=\frac{\left(b-a\right)^{n}}{n!}\max\left\{\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{\left(b-a\right)^{m+1-q}}{\left(m-q\right)!}\right)^{\delta_1}\right\}$$

$$\cdot\int_a^b \Phi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)dx\,. \tag{10}$$

由 (2) 和 (10) 得

$$\begin{aligned}\int_a^b \Phi\left(\left|u^{(m)}\right|\right) &= \int_a^b \psi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)\left|u^{(m)}\right|dx \\ &= \int_a^b \psi\left(u^{(m)}\right)u^{(m)}dx \\ &\le \int_a^b \left|u^{(m-n)}\left(\psi\left(u^{(m)}\right)\right)^{(n)}\right|dx \\ &= \int_a^b \left|r^{(k)} f\left(u^{(q)}\right)u^{(m-n)}\right|dx \\ &\le k_0\psi\left(\left|u^{(q)}(c)\right|\right)\left|u^{(m-n)}(c)\right|\int_a^b \left|r^{(k)}(x)\right|dx \\ &\le \frac{(b-a)^n k_0}{n!}\max\left\{\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_0},\left(\frac{(b-a)^{m+1-q}}{(m-q)!}\right)^{\delta_1}\right\}\int_a^b \Phi\left(\left|u^{(m)}\right|\right)\cdot\int_a^b \left|r^{(k)}(x)\right|dx\end{aligned}$$

定理 2 的（i）得证.

定理 2 的（ii）的证明与（i）类似，可得

$$\int_a^b \left|r^{(k)}(x)\right|dx \ge \frac{n!}{k_0(b-a)^n}\cdot\min\left\{\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\theta_0},\left(\frac{(m-q)!}{(b-a)^{m+1-q}}\right)^{\theta_1}\right\}.$$

[参　考　文　献]

[1] A. Lyapunov. Probleme General de la Stabilite du Mouvement [J]. Ann.Math.Studies, 1949, 17:

[2] R. C. Brown , D. B. Hinton. Lyapunov inequalities and their applications [M]. Dordrecht,The Netherlands: Kluwer Academic Publishers,2000.

[3] S. Cheng. Lyapunov inequalities for differential and difference equations [J]. Fasc.Math., 1991,23(23):25 - 41.

[4] A.Tiryaki. Recent development of Lyapunov-type inequalities[J]. Adv.Dyn.Syst.Appl., 2010, 5(2):231 - 248.

[5] R. P. Agarwal, A Ozbekler. Lyapunov type inequalities for second order sub and super-half-linear differential equations [J]. Dynamic Systems & Applications, 2015, 24(1):211 - 220.

[6] P. Almenar, L.Jodar. A Lyapunov inequality for a second order nonlinear differential equation [J]. Appl. Math. Lett., 2011,24(4):524 - 527.

[7] D. Cakmak. On Lyapunov-type inequality for a class of nonlinear systems [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2013,16(1):101 - 108.

[8] D. Cakmak. On Lyapunov-type inequality for a class of quasilinear systems [J]. Electronic

Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2014,2014(9):1 - 10.
[9] O. Dosly, P. Rehak. Half-Linear Differential Equations [J]. Math. Stud., 2005,202.
[10] G. Guseinov, B.Kaymakcalan. Lyapunov inequalities for discrete linear Hamiltonian systems [J]. Comput. Math. Appl., 2003,45(6):1399 - 1416.
[11] C. Lee, C. Yeh, C. Hong, R.P.Agarwal. Lyapunov and Wirtinger inequalities [J]. Appl. Math. Lett., 2004,17(7):847 - 853.
[12] J. P. Pinasco. Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional p-laplacian [J]. Abstr. Appl. Anal., 2004,2004(2):147 - 153.
[13] J. P. Pinasco. Comparison of eigenvalues for the p-laplacian with integral inequalities [J]. Appl. Math. Comput., 2006,182(2):1399 - 1404.
[14] J. P. Pinasco. Lyapunov-type inequalities with applications to eigenvalue problems [J]. Springer Briefs in Mathematics.2013.
[15] X. Tang, M. Zhang. Lyapunov inequalities and stability for linear Hamiltonian systems [J]. Differential Equations, 2012,252(1):358 - 381.
[16] A. Tiryaki, M. Unal, D. Cakmak. Lyapunov-type inequalities for nonlinear systems [J]. Math. Anal. 2007,332(1):497 - 511.
[17] P. L. De Napoli, J. P. Pinasco. A Lyapunov inequality for monotone quasilinear operators [J]. Differential Integral Equations, 2005,18(10):1193 - 1200.
[18] J. Zheng, X. Guo. Lyapunov-type inequalities for ψ − Laplacian equations [J]. chinaXiv:201805.00171, 2018.

邮箱：zhengjun@swjtu.edu.cn (郑军)